Colle du 13/05 - Sujet 1
Intégration et probabilités

Question de cours. Théorème fondamental de l'analyse : énoncé dans le cas continu et démonstration dans le cas lipschitzien.

Exercice 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{t+n}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer la limite de $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2. Un fumeur tente d'arrêter de fumer. Le jour n s'il a arrêter de fumer, il a une probabilité $1/2$ le jour suivant de recommencer à fumer. Et s'il fumait le jour n, il a une probabilité $1/4$ d'arrêter de fumer le jour suivant. On note p_n la probabilité que notre individu fume le jour n.

1. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
2. En déduire une expression de p_n en fonction de n et p_0.
3. Que vaut $\lim_{n\to+\infty} p_n$?

Colle de mathématiques PTSI 2023-2024

Colle du 13/05 - Sujet 2
Intégration et probabilités

Question de cours. Théorème des sommes de Riemann : énoncé dans le cas continu et démonstration dans le cas lipschitzien.

Exercice 1. Déterminer la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2. On possède $N+1$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne k possède k boules blanches et $N-k$ boules noires. On pioche n fois dans la même urne.

1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche à l'étape $n+1$ sachant que l'on a obtenu que des boules blanches lors des n précédents tirages.
2. Donner la limite de la probabilité précédente.

Colle de mathématiques PTSI 2023-2024

Colle du 13/05 - Sujet 3
Intégration et probabilités

Question de cours. Démontrer la formule des probabilités totales.

Exercice 1. On possède une pièce retournant pile avec une probabilité de $1/3$ et de deux dés : un dé A ayant 4 faces rouges et 2 faces blanches et un dé B ayant 2 faces rouges et 4 faces blanches. On lance la pièce. Si l'on tombe sur pile, alors on lance à deux reprises le dé A et si l'on tombe sur face, on lance deux fois le dé B. La probabilité d'avoir obtenue la face rouge au second lancer est-elle indépendante de la probabilité d'avoir obtenue la face rouge au premier lancer ?

Exercice 2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^{2x} \operatorname{sh}(t) f\left(t^2\right) \mathrm{d}t$.

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. On prend $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, calculer alors F.